系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
27(3) (2007, 6), 464–480

离散时间大种群随机多智能体系统的线性二次分散动态博弈*

马翠芹 李 韬 张纪峰

(中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘要 研究具有耦合二次型随机性能指标的离散时间大种群随机多智能体系统的分散博弈问题. 系统所受的噪声干扰为条件二阶矩有界的鞅差序列, 比以往研究所考虑的高斯白噪声情形更具有广泛性. 采用状态聚集方法构造了对种群状态平均的估计, 基于 Nash 必然等价原理设计了分散控制律, 并利用概率极限理论分析了闭环系统的稳定性和最优性. 主要结果包括: (1) 证明了对种群状态的平均的估计在某种范数意义下的强一致性, 即种群状态的平均与其估计值之间的误差在该范数意义下将随系统个体数 N 的增加几乎必然收敛于 0; (2) 证明了闭环系统的几乎必然一致稳定性, 即系统的稳定性与种群个体数 N 无关; (3) 证明了所设计的分散控制律是几乎必然渐近 Nash 均衡策略.

关键词 多智能体系统, 分散控制, 渐近 Nash 均衡, 离散时间系统, 随机动态博弈.

MR(2000) 主题分类号 91A15, 93E20

1 引 言

多智能体系统 (Multi-Agent Systems, MAS) 是分布式系统的一个分支, 它不仅具备一般分布式系统所具有的资源共享、可靠性强等特点, 而且由于每个个体能够通过相互协调解决大规模的复杂问题[1], 使得该类系统具有很强的鲁棒性、可靠性和自组织能力. 基于 MAS 的分析和控制问题得到了越来越多学者的关注. 本文主要关注的是 MAS 中特别重要的一类 – 大种群随机多智能体系统 (Large Population Stochastic Multi-Agent Systems, LPSMAS). 这类系统大量存在于生物[2]、经济[3]、工程[4−5] 等系统中. 它的个体数 N 通常非常巨大, 且往往与系统的稳定性密切相关[6], 因此当个体数 N 趋于无穷时系统的渐近性质成为 LPSMAS 研究中的一个重点.

在对 LPSMAS 的研究中, 所针对的性能指标可以分为确定性指标和随机指标两种. 随机指标物理意义清晰, 比确定性指标更加符合实际. 但关于随机指标的最优性分析需要利用系统样本轨道的性质, 这给所涉及到的估计收敛性等问题带来了较大困难. 目前对 LPSMAS 的研究大多限于确定性指标[7−8], 针对随机指标的研究还较少[9−10]. MAS 的一个重要特点是

* 国家自然科学基金项目 (60221301) 和中国科学院知识创新工程重要方向项目 (KJCX3-SYW-S01) 资助课题.

收稿日期: 2007-04-29.

每个智能体都只具有有限的感知能力，对 MAS 的最优化更适于在分散博弈的框架下进行．本文针对耦合二次型随机性能指标，利用文 [8] 中的状态聚集方法，设计了分散控制律，并且证明了所设计的控制律是几乎必然渐近 Nash 均衡策略．

以往对随机 MAS 线性二次动态博弈的研究，大都针对的是连续时间系统且系统所受的噪声干扰大都为高斯白噪声[7−10], 这在一定程度上限制了所得结果的应用范围．本文考虑了离散时间随机 MAS 线性二次分散动态博弈问题，所给出的控制律是以离散时间形式描述的，更便于实际数字控制器的设计．此外，这里所考虑的噪声干扰为条件二阶矩有界的鞅差列，比高斯白噪声所描述的噪声范围更广．一般来说，鞅差序列的各项不具备正态性和独立性；对于离散时间系统，又没有像连续时间情形下伊藤公式这一类有力工具，这都给闭环系统分析过程中交叉项的消除和估计收敛性的证明带来了困难，为此我们引入了鞅差加权和估计定理[11], 利用矩阵分析和概率极限理论的相关工具，证明了由文献 [8] 中状态聚集方法所构造的对种群状态平均 (Population State Average, PSA) 的估计在某种范数意义下的强一致性，进而利用估计的强一致性证明了闭环系统的几乎必然渐近最优性．

本文将采用如下记号 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维的实向量全体； I_m 表示 m 维的单位矩阵； $\mathbb{R}^{m\times d}$ 表示 $m\times d$ 维实矩阵全体； X^{T} 表示向量或矩阵 X 的转置； $\|X\|$ 表示向量或矩阵 X 的欧式范数； $\mathrm{tr}(X)$ 表示矩阵 X 的迹； $\rho(X)$ 表示矩阵 X 的谱半径； I_A 表示集合 A 的示性函数．

2　问题描述

本文研究的是这样一类系统，其每个智能体的动态特性由线性随机差分方程描述

$$y_i(t+1)=A(\theta_i)y_i(t)+B(\theta_i)u_i(t)+Cw_i(t+1), \tag{1}$$

其中 $i=1,2,\cdots,\ t=0,1,\cdots,\ y_i\in\mathbb{R}^n$ 是第 i 个智能体的可量测状态， $u_i\in\mathbb{R}^m$ 是其控制输入， $\theta_i=\left(\theta_i^1,\theta_i^2,\cdots,\theta_i^{N_0}\right)$ 是其动力学参数，称为参数向量，它反映了第 i 个智能体的结构信息； $\{w_i(t),\ t=0,1,\cdots,\ i=1,2,\cdots\}$ 是随机噪声； $A(\cdot):\mathbb{R}^{N_0}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n},\ B(\cdot):\mathbb{R}^{N_0}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times m}$ 是相应维数连续矩阵值函数．另外，参数向量 θ_i 还具有如下性质： $\{\theta_i,\ i=1,2,\cdots\}$ 是从统计结构 $\left(\mathbb{R}^{N_0},F(\theta)\right)$ 中独立重复抽样得到的一个样本，其中 $F(\cdot):\ \mathbb{R}^{N_0}\longrightarrow[0,1]$ 是参数向量空间上的分布函数，称为参数向量空间的先验分布．我们可以利用 $\{\theta_i,\ i=1,2,\cdots\}$ 构造参数向量空间的经验分布函数

$$F_N(\theta)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}I_{[\theta_i<\theta]}, \tag{2}$$

其中 $\theta=\left(\theta^1,\theta^2,\cdots,\ \theta^{N_0}\right), [\theta_i<\theta]=\left[\theta_i^1<\theta^1,\theta_i^2<\theta^2,\ \cdots,\ \theta_i^{N_0}<\theta^{N_0}\right]$.

我们将由前 N 个这样的动力学方程构成的系统记作 S^N, 这里 S^N 的一个控制组记为 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_{_N}\}$, 第 i 个智能体的性能指标为耦合二次型形式

$$J_i^N\left(u_i,u_{-i}\right)\ =\ \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left(y_i(t)-\gamma\overline{y}_N(t)\right)^{\mathrm{T}}Q\left(y_i(t)-\gamma\overline{y}_N(t)\right)+u_i^{\mathrm{T}}Ru_i\right], \tag{3}$$

其中 $i=1,2,\cdots,N,\ \gamma$ 为常数， $\overline{y}_N(t)=\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}y_j(t),\ Q$ 为 n 维的半正定矩阵， R 为 m 维的正定矩阵， $u_{-i}=\{u_1,u_2,\cdots,u_{i-1},u_{i+1},\cdots,u_N\}$.

我们用 $\mathcal{U}_{l,i}^N$ 表示系统 S^N 中第 i 个智能体的基于局部量测信息的允许控制集合，$\mathcal{U}_{g,i}^N$ 表示系统 S^N 中第 i 个智能体的基于全局量测信息的允许控制集合. 所谓分散博弈是指第 i 个智能体只能利用其局部量测信息综合控制律 u_i 即 $u_i \in \mathcal{U}_{l,i}^N$, 以极小化其相应的指标 $J_i^N(u_i, u_{-i})$. 具体的，本文中的 $\mathcal{U}_{g,i}^N$ 和 $u_i \in \mathcal{U}_{l,i}^N$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{l,i}^N \;=\; & \Big\{u_i|u_i \text{ 关于 } \sigma\left(y_i(s),\ s=0,1,\cdots,t\right) \text{可测}, \ \|y_i(n)\|^2=o(n),\\ & \sum_{t=0}^{n-1}\left(\|u_i(t)\|^2+\|y_i(t)\|^2\right)=O(n).\ \ a.s.\Big\},\\ \mathcal{U}_{g,i}^N \;=\; & \Big\{u_i|u_i \text{ 关于 } \sigma\left(y_i(s),\ s=0,1,\cdots,t,\ i=1,2,\cdots,N\right) \text{可测}, \ \|y_i(n)\|^2=o(n),\\ & \sum_{t=0}^{n-1}\left(\|u_i(t)\|^2+\|y_i(t)\|^2\right)=O(n).\ \ a.s.\Big\}.\end{aligned}$$

注 1　性能指标 (3) 有着广泛的实际背景，例如，文 [12] 研究了无线通信网络的功率控制问题，其中基站对第 i 个用户的接收功率为 y_i, 每个用户需要选择控制策略 u_i, 使得自身不仅控制能量消耗少而且信干比 (Signal–to–Interference Ratio) 接近于给定的常数 γ, 我们通过极小化下面的性能指标就可以实现这种控制目标.

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big\{\left[y_i(t)-\gamma\left(\overline{y}_N(t)+\eta\right)\right]^2+ru_i^2\Big\},$$

其中 $i=1,2,\cdots,N$, η 是背景噪声强度.

对模型 (1) 我们有如下基本假设

($\mathbf{H_1}$) $F(\cdot)$ 的支撑集 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^{N_0}$ 上的有界闭集.

($\mathbf{H_2}$) $\{F_N,\ N=1,2,\cdots\}$弱收敛到F, 即$F_N(\theta)\xrightarrow[N\to\infty]{\omega}F(\theta)$.

($\mathbf{H_3}$) 对任意的 $\theta\in\mathcal{M}$, $(A(\theta),B(\theta),D)$ 能控能观，其中 $D^{\mathrm{T}}D=Q$.

($\mathbf{H_4}$) $\{y_i(0),\ i=1,2,\cdots\}$ 是 i.i.d, $y_i(0)$ 关于 $\mathcal{F}_0^i$ 可测，并且 $E\|y_i(0)-Ey_i(0)\|^4<\infty$.

($\mathbf{H_5}$) $\left\{\left(w_i(t),\mathcal{F}_t^i\right),\ t=0,1,\cdots,\ i=1,2,\cdots\right\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的相互独立的 d 维鞅差列集合，满足如下条件

$$\sup_{t\ge0}E\left[\|\omega_i(t+1)\|^2|\mathcal{F}_t^i\right]\;<\;\infty,\ \ a.s.\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\omega_i(t)\omega_i^{\mathrm{T}}(t)\;=\;R_i\le R_\omega,\ \ a.s.\ i=1,2,\cdots.$$

其中 R_i 及 R_ω 为正定阵， $\mathcal{F}_t^i\triangleq\sigma\left(\omega_i(s),\ s=0,1,\cdots,t\right)$.

注 2　由假设 (H_3) 及 $A(\theta)$, $B(\theta)$ 的连续性和 $\mathcal{M}$ 的紧性，我们不难得到如下结论

(i) 对任意的 $\theta\in\mathcal{M}$, Riccati 方程

$$S(\theta)=A^{\mathrm{T}}(\theta)S(\theta)A(\theta)-A^{\mathrm{T}}(\theta)S(\theta)B(\theta)\left(R+B^{\mathrm{T}}(\theta)S(\theta)B(\theta)\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}(\theta)S(\theta)A(\theta)+Q,\quad(4)$$

存在唯一正定解 $S(\theta)$, $S(\cdot)$ 是 $\mathcal{M}$ 上的连续矩阵值函数.

(ii) 对任意的 $\theta\in\mathcal{M}$, $G(\theta)=A(\theta)-B(\theta)\left(R+B^{\mathrm{T}}(\theta)S(\theta)B(\theta)\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}(\theta)S(\theta)A(\theta)$ 是稳定矩阵， $G(\cdot)$ 是 $\mathcal{M}$ 上的连续矩阵值函数，并且存在 $M>0$, $\lambda\in(0,1)$, 使得 $\|G(\theta)\|^n\le M\lambda^n$, $\forall\ n\ge0$.

为了更好的对关于随机性能指标的极小化进行定量描述，我们引入了几乎必然渐近 Nash-均衡的概念.

定义 2.1[9] 一列控制组 $\left\{U^N=\left\{u_i^N,\ i=1,2,\cdots,N\right\},\ N=1,2,\cdots\right\}$ 称为关于相应指标组列 $\left\{J^N=\left\{J_i^N\left(u_i^N,u_{-i}^N\right),\ i=1,2,\cdots,N\right\},\ N=1,2,\cdots\right\}$ 的几乎必然渐近 Nash- 均衡当且仅当存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的非负随机变量列 $\{\varepsilon_N,\ N=1,2,\cdots\}$, 使得 $\varepsilon_N \xrightarrow[N\to\infty]{a.s.} 0$, 且对充分大的 N, 有 $J_i^N\left(u_i^N,u_{-i}^N\right)\leq \inf_{v_i\in\mathcal{U}_{g,i}^N} J_i^N\left(v_i,u_{-i}^N\right)+\varepsilon_N,\ a.s.\ i=1,2,\cdots,N.$

3 分散控制律的设计

由模型 (1) 和性能指标 (3) 可知，我们所讨论的问题可以看作是跟踪型二次指标最优控制问题. 对这类问题，文献 [11] 对被跟踪信号为已知的确定性信号的情形作了解答. 然而，本文中第 i 个智能体跟踪的信号为 $\gamma\overline{y}_N(t)$, 这是个未知信号，不能用于控制律的设计. 我们称 $\overline{y}_N(t)$ 为 PSA[9]. 根据 NCE[9,13], 我们可以首先构造对 PSA 的估计 $y^*(t)$, 从直观上看 $y^*(t)$ 应具有如下的性质：如果每个智能体将 $y^*(t)$ 看作对 PSA 的有效估计，并利用它构造控制律，那么由此导致的闭环系统 PSA 的数学期望应该刚好就是 $y^*(t)$ 或者当系统中的个体数 N 趋于无穷时趋于 $y^*(t)$. 如果具有上述性质的 $y^*(t)$ 存在，我们就可以用 $y^*(t)$ 代替 $\overline{y}_N(t)$ 构造分散控制律.

在性能指标 (3) 中若以某个有界信号 $y^c(t)$ 代替 $\overline{y}_N(t)$, 则由文献 [11] 中定理 3.5可以得到第 i 个智能体的最优跟踪控制律

$$\begin{aligned}u_i(t)=&-\left(R+B^{\mathrm{T}}(\theta_i)S(\theta_i)B(\theta_i)\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}(\theta_i)S(\theta_i)A(\theta_i)y_i(t)\\&-\left(R+B^{\mathrm{T}}(\theta_i)S(\theta_i)B(\theta_i)\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}(\theta_i)b_i(t+1),\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $b_i(t)=-\sum\limits_{j=0}^{\infty}G^j(\theta_i)^{\mathrm{T}}Q\gamma y^c(t+j)$, $S_i=S(\theta)|_{\theta=\theta_i}$, $S(\theta)$ 是 Riccati 方程 (4) 的唯一正定解.

记 $A_i=A(\theta)|_{\theta=\theta_i}$, $B_i=B(\theta)|_{\theta=\theta_i}$, $G_i=G(\theta)|_{\theta=\theta_i}$. 将式 (5) 代入式 (1), 得到第 i 个智能体的闭环系统方程

$$y_i(t)=G_iy_i(t-1)-B_i\left(R+B_i^{\mathrm{T}}S_iB_i\right)^{-1}B_i^{\mathrm{T}}b_i(t)+C\omega_i(t).$$

对上式两边取期望得 $Ey_i(t)=G_iEy_i(t-1)-B_i\left(R+B_i^{\mathrm{T}}S_iB_i\right)^{-1}B_i^{\mathrm{T}}b_i(t)$. 下面我们用状态聚集方法 ([8]) 构造对 PSA 的估计. 首先，我们构造一个辅助系统

$$\begin{cases}Ey_\theta(t)=G(\theta)Ey_\theta(t-1)-B(\theta)\left(R+B^{\mathrm{T}}(\theta)S(\theta)B(\theta)\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}(\theta)b_\theta(t),\\ Ey_\theta(0)=y_0,\\ b_\theta(t)=-\sum\limits_{j=0}^{\infty}G^j(\theta)^{\mathrm{T}}Q\gamma y^c(t+j),\\ y^c(t)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N_0}}Ey_\theta(t)\mathrm{d}F(\theta),\end{cases}\tag{6}$$

这个辅助系统含有连续统个智能体，每个智能体用参数向量 θ 标记， $F(\theta)$ 表示了参数向量

的取值分布. 记 $P(\theta)=B(\theta)\left(R+B^{\mathrm{T}}(\theta)S(\theta)B(\theta)\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}(\theta)$. 由式 (6) 得

$$Ey_\theta(t)=G^t(\theta)y_0+\sum_{i=1}^{t}G^{t-i}(\theta)P(\theta)\bigg(\sum_{j=0}^{\infty}G^j(\theta)^{\mathrm{T}}Q\gamma y^c(i+j)\bigg). \tag{7}$$

定义

$$E_n\triangleq\{a=\{a(k)\}|a(k)\in\mathbb{R}^n,k=0,1,\cdots\},\quad E_n^b\triangleq\Big\{a=\{a(k)\}|a\in E_n\text{且}\sup_{k\geq 0}\|a(k)\|<\infty\Big\},$$

$\forall\, a\in E_n^b$, 定义 $\|a\|_\infty\triangleq\sup_k\|a(k)\|$, 则可以证明 $(E_n^b,\|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间. 定义 $(E_n^b,\|\cdot\|_\infty)$ 上的算子

$$\mathcal{J}:\ (\mathcal{J}x)(k)\triangleq\int_{\mathbb{R}^{N_0}}\bigg\{G^k(\theta)y_0+\sum_{i=1}^{k}G^{k-i}(\theta)P(\theta)\bigg(\sum_{j=0}^{\infty}G^j(\theta)^{\mathrm{T}}Q\gamma x(i+j)\bigg)\bigg\}\mathrm{d}F(\theta),\quad \forall x\in E_n^b.$$

由注 2 可知, $\mathcal{J}$ 是 $(E_n^b,\|\cdot\|_\infty)$ 上的算子.

由算子 $\mathcal{J}$ 的定义和式 (7), 辅助系统 (6) 可写为

$$y^c=\mathcal{J}y^c. \tag{8}$$

方程 (8) 体现了 NCE 对 PSA 的估计所要求的性质. 因此, 如果方程 (8) 存在唯一解, 那么此解就可以作为对 PSA 的估计. 下面我们给出方程 (8) 有唯一解的一个充分条件.

定理 3.1 对系统 (1) 和性能指标 (3), 如果 $\|Q\||\gamma|\int_{\mathbb{R}^{N_0}}\Big(\sum\limits_{j=0}^{\infty}\|G(\theta)\|^j\Big)^2\|P(\theta)\|\mathrm{d}F(\theta)<1$, 则方程 (8) 存在唯一解.

证 由算子 $\mathcal{J}$ 的定义可知, 对任意的 $x,\,y\in E_n^b$, 有

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{J}x-\mathcal{J}y)(t)\| &= \bigg\|\int_{\mathbb{R}^{N_0}}\sum_{i=1}^{t}G^{t-i}(\theta)P(\theta)\bigg(\sum_{j=0}^{\infty}G^j(\theta)^{\mathrm{T}}Q\gamma(x(i+j)-y(i+j))\bigg)\mathrm{d}F(\theta)\bigg\|\\ &\leq \|x-y\|_\infty\|Q\||\gamma|\int_{\mathbb{R}^{N_0}}\bigg(\sum_{j=0}^{\infty}\|G(\theta)\|^j\bigg)^2\|P(\theta)\|\mathrm{d}F(\theta).\end{aligned}$$

因此, 由定理的条件知 $\mathcal{J}$ 是 $(E_n^b,\|\cdot\|_\infty)$ 上的压缩映射算子. 从而方程 (8) 在 E_n^b 上存在唯一解.

由于定理 3.1 的条件是加在系统结构上的, 因此比较容易验证. 为便于分散控制律的设计, 在以后的分析中我们假设

($\mathbf{H_6}$) 方程 (8) 存在唯一解, 并将其记为 y^*.

在假设 (H_6) 下, 我们可以为第 i 个智能体构造分散控制律, 并将其记作 u_i^0

$$u_i^0(t)\ =\ -\left(R+B_i^{\mathrm{T}}S_iB_i\right)^{-1}B_i^{\mathrm{T}}S_iA_iy_i(t)-\left(R+B_i^{\mathrm{T}}S_iB_i\right)^{-1}B_i^{\mathrm{T}}b_i(t+1), \tag{9}$$

其中

$$b_i(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}{G_i^j}^{\mathrm{T}}Q\gamma y^*(t+j). \tag{10}$$

由式 (8) 可知，y^* 只与系统的结构信息 $A(\cdot), B(\cdot), F(\cdot)$, 指标参数 Q, R 以及初始状态的数学期望 y_0 有关，而与智能体的实时状态 $y_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, N$ 无关. 因此，由式 (9) 所确定的控制律确实只依赖于第 i 个智能体的局部量测信息，因而是分散控制. 至此，我们基于 NCE 的思想和跟踪型二次指标最优控制完成了分散控制律的设计.

4　闭环系统分析

定理 4.1　对系统 (1), 如果假设 (H_1), $(\mathrm{H}_3)-(\mathrm{H}_6)$ 成立，则控制律 (9) 及其对应的闭环解 $y_i^0(t)$ 满足

$$\sup_{N\geq 1}\max_{1\leq i\leq N}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\|u_i^0(t)\|^2+\|y_i^0(t)\|^2\right) \ < \ \infty, \quad a.s. \tag{11}$$

证　将控制律 (9) 代入系统方程 (1) 得到闭环解

$$y_i^0(t) \ = \ G_i^t y_i(0) - \sum_{j=1}^{t} G_i^{t-j} P_i b_i(j) + \sum_{j=1}^{t} G_i^{t-j} C w_i(j). \tag{12}$$

因此

$$\|y_i^0(t)\|^2 \ \leq \ 3\left\|G_i^t y_i(0)\right\|^2 + 3\left\|\sum_{j=1}^{t} G_i^{t-j} P_i b_i(j)\right\|^2 + 3\left\|\sum_{j=1}^{t} G_i^{t-j} C w_i(j)\right\|^2. \tag{13}$$

由于 G_i 为稳定矩阵，所以

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\|G_i^t y_i(0)\right\|^2 \ = \ 0, \quad a.s. \tag{14}$$

记 $M_{y^*} = \|y^*\|_\infty$, $M_P = \sup\limits_{\theta\in\mathcal{M}}\|P(\theta)\|$, $M_S = \sup\limits_{\theta\in\mathcal{M}}\|S(\theta)\|$, $M_B = \sup\limits_{\theta\in\mathcal{M}}\|B(\theta)\|$, $M_A = \sup\limits_{\theta\in\mathcal{M}}\|A(\theta)\|$, 由注 2(ii) 及式 (10) 可知

$$\|b_i(t)\| \ \leq \ \sum_{j=0}^{\infty}\|G_i\|^j\|Q\||\gamma|M_{y^*} \ = \ \|Q\||\gamma|MM_{y^*}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \ = \ \frac{\|Q\||\gamma|MM_{y^*}}{1-\lambda} \ \triangleq \ M_b, \tag{15}$$

进而

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\|\sum_{j=1}^{t} G_i^{t-j} P_i b_i(j)\right\|^2 \ \leq \ \frac{M_b^2 M_P^2 M^2}{(1-\lambda)^2} \triangleq K_1 \ < \infty, \quad a.s. \tag{16}$$

由注 2(ii) 及柯西不等式得

$$\sum_{t=0}^{n-1}\left\|\sum_{j=1}^{t} G_i^{t-j} C w_i(j)\right\|^2 \leq \ \frac{M^2\|C\|^2}{1-\lambda}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}\right)\sum_{t=1}^{n}\|w_i(t)\|^2 \leq \ \frac{M^2\|C\|^2}{(1-\lambda)^2}\sum_{t=1}^{n}\|w_i(t)\|^2, \tag{17}$$

由此及假设 (H_5) 知

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\|\sum_{j=1}^{t} G_i^{t-j} C w_i(j)\right\|^2 \ \leq \ \frac{M^2\|C\|^2\mathrm{tr}(R_\omega)}{(1-\lambda)^2} \ \triangleq \ K_2 \ < \infty, \quad a.s. \tag{18}$$

综合式 (13), (14), (16) 和 (18) 得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\|y_i^0(t)\|^2 \ \le\ K_1+K_2\ <\ \infty,\quad a.s. \tag{19}$$

由式 (9) 及 (15) 可知

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\|u_i^0(t)\|^2\le 2\|R^{-1}\|^2M_B^2M_S^2M_A^2(K_1+K_2)+2\|R^{-1}\|^2M_B^2M_b^2. \tag{20}$$

注意到 K_1, K_2 和 M_b 与 i, N 无关，由式 (19) 和式 (20) 知式 (11) 成立.

注 3 定理 4.1 说明闭环系统是在时间平均意义下几乎必然一致稳定的. 所谓一致是指存在 $A\in\mathcal{F}$, $P(A)=1$ 使得 $\forall\,\omega\in A$, 都存在与 N, i 无关的非负有限随机变量 $C(\omega)$ 满足 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{t=0}^{n-1}\left(\|u_i^0(t)\|^2+\|y_i^0(t)\|^2\right)\le C(\omega)$. 因此，当系统个体数 N 趋于无穷时整个系统仍能保持稳定.

由定理 4.1 的证明可知闭环系统的稳定性只与对 PSA 的估计 y^* 的有界性有关，而与其估计精度无关. 我们自然关心的一个问题是应该采用怎样的指标来刻画对 PSA 的估计精度？下面我们就来回答这些问题.

引理 4.1[9] 若 $\mathbb{R}^n$ 上的分布函数 $F_N(x)\xrightarrow[N\to\infty]{\omega}F(x)$, 且 F_N, F 有紧支撑 $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$, 则对 $\mathcal{M}$ 上一致有界等度连续函数 $g(x,t)$ 有 $\lim\limits_{N\to\infty}\sup_{t\ge0}\left\|\int_{\mathbb{R}^n}g(x,t)\mathrm{d}F_N(x)-\int_{\mathbb{R}^n}g(x,t)\mathrm{d}F(x)\right\|=0$. 如果对任给的 $t\in[0,\infty)$, $g(x,t)$ 是 $\mathcal{M}$ 上的连续函数，则 $\forall\,t\ge0$, $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|\int_{\mathbb{R}^n}g(x,t)\mathrm{d}F_N(x)-\int_{\mathbb{R}^n}g(x,t)\mathrm{d}F(x)\right\|=0$.

定理 4.2 对于系统 (1), 如果假设 $(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_6)$ 成立，则在控制律 (9) 下闭环系统的解 $y_i^0(t)$ 满足

$$\lim_{N\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\|\overline{y}_N^0(t)-y^*(t)\right\|^2=0,\quad a.s. \tag{21}$$

其中 $\overline{y}_N^0(t)=\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}y_i^0(t)$.

注 4 定理 4.2 可以看作从时间和“空间”两个方面同时对 y^* 的估计性能进行了度量. 我们所构造的 E_n 的子空间 $E_n^{P_b}\triangleq\left\{x\in E_n|\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{t=0}^{n-1}\|x(t)\|^2<\infty\right\}$ 实际上是所有平均功率有限的序列集合. 我们可以在 $E_n^{P_b}$ 上定义一个等价关系 $\sim$: 对任意的 $x,y\in E_n^{P_b}$, $x\sim y$ 当且仅当

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\|x(t)-y(t)\|^2=0.$$

将以 x 为代表元的等价类记作 $[x]$, 在商空间 $E_n^{P_b}/\sim$ 上定义范数：对任意 $[x]\in E_n^{P_b}$,

$$\big\|[x]\big\|_{P_b}\triangleq\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\|x(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

可以证明 $(E_n^{P_b},\|\cdot\|_{P_b})$ 是一个赋范空间. 结合定理 4.1, 定理 4.2 表明 $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|\overline{y}_N^0(t)-y^*(t)\right\|_{P_b}=0$ 依概率 1 成立. 即随着 N 的增加，对 PSA 的估计偏差在 $\|\cdot\|_{P_b}$ 范数意义下几乎必然收敛于 0. 因此，我们可以说 y^* 是在时间平均或 $\|\cdot\|_{P_b}$ 范数意义下对 PSA 的强一致估计. 另外，定理 4.2 也是后面分散控制律渐近最优性分析的有力工具.

定理 4.2 的证明用到了如下两个引理.

引理 4.2 对系统 (1), 如果假设 (H_1), $(\mathrm{H}_3)-(\mathrm{H}_6)$ 成立, 则辅助系统 (6) 的唯一解 $Ey_\theta(t)$ 是 $\mathcal{M}$ 上一致有界等度连续函数，即 $\sup\limits_{\theta\in\mathcal{M}}\|Ey_\theta\|_\infty<\infty$, 且对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意的 $\theta_1,\ \theta_2\in\mathcal{M},\ \ t=0,1,\cdots$ 只要 $\|\theta_1-\theta_2\|<\delta$ 就有 $\|Ey_{\theta_1}(t)-Ey_{\theta_2}(t)\|<\varepsilon$.

证　见附录 A.

引理 4.3 对系统 (1), 如果假设 (H_1), $(\mathrm{H}_3)-(\mathrm{H}_6)$ 成立，则在控制律 (9) 下闭环系统的解 $y_i^0(t)$ 满足

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\|\overline{y}_N^0(t)-E\overline{y}_N^0(t)\right\|^2\le\ \frac{2M^2\|C\|^2\mathrm{tr}\,(R_\omega)}{N(1-\lambda)^2},\quad a.s. \tag{22}$$

证　见附录 B.

定理 4.2 的证明 由式 (7) 和 (12) 知 $Ey_i^0(t)=\ Ey_\theta(t)|_{\theta=\theta_i}$, 由此及式 (2) 和式 (6) 得

$$E\overline{y}_N^0(t)-y^*(t)\ =\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Ey_\theta(t)|_{\theta=\theta_i}-y^*(t)\ =\ \int_{\mathbb{R}^{N_0}}Ey_\theta(t)\mathrm{d}F_N(\theta)-\int_{\mathbb{R}^{N_0}}Ey_\theta(t)\mathrm{d}F(\theta). \tag{23}$$

由引理 4.2 知 $Ey_\theta(t)$ 是 $\mathcal{M}$ 上一致有界等度连续函数. 从而，由式 (23) 和引理 4.1 知

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{t\ge0}\|E\overline{y}_N^0(t)-y^*(t)\|=0,\quad a.s.$$

因此 $\lim\limits_{N\to\infty}\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{t=0}^{n-1}\left\|E\overline{y}_N^0(t)-y^*(t)\right\|^2\ \le\ \limsup\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{t\ge0}\left\|E\overline{y}_N^0(t)-y^*(t)\right\|^2\ =0,\quad a.s.$ 注意到

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\|\overline{y}_N^0(t)-y^*(t)\right\|^2\ &\le 2\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\|\overline{y}_N^0(t)-E\overline{y}_N^0(t)\right\|^2\\&\quad+2\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\|E\overline{y}_N^0(t)-y^*(t)\right\|^2,\end{aligned}$$

结合引理 4.3 知式 (21) 成立，定理 4.2 证毕.

下面考察分散控制律 $\left\{U^N=\left\{u_i^0,\ i=1,2,\cdots,N\right\},\ N=1,2,\cdots\right\}$ 关于其相应指标组列 $\left\{J^N=\left\{J_i^N,\ i=1,2,\cdots,N\right\},\ N=1,2,\cdots\right\}$ 的最优性.

定理 4.3 对于系统 (1) 和指标 (3), 如果假设 $(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_6)$ 成立, 则控制组列 $\{U^N=\{u_i^0,\ i=1,2,\cdots,N\},\ N=1,2,\cdots\}$ 是关于相应指标组列

$$\left\{J^N=\left\{J_i^N,\ i=1,2,\cdots,N\right\},\ N=1,2,\cdots\right\}$$

的几乎必然渐近 Nash- 均衡.

证　见附录 C.

注 5 由定理 4.3 可以知道我们所构造的分散控制律是次优的．这是由于每个智能体获取信息的能力是有限的．但由几乎必然渐近 Nash- 均衡的定义及定理 4.3 可知，当系统个体数 N 趋于无穷时次优指标和最优指标间的偏差会几乎必然趋于 0. 因此我们所构造的分散控制律是在 Nash 均衡意义下几乎必然渐近最优的．

5 数值仿真

考虑一个一维系统模型．第 i 个智能体的动力学方程为

$$y_i(t+1) \;=\; ay_i(t)+bu_i(t)+0.2\omega_i(t+1),$$

其中初始值 $y_i(0)$ 具有正态分布 $N\left(y_0,\sigma_{y_0}^2\right)$, $\{\omega_i(t),\ t=0,1,\cdots,\ i=1,2,\cdots,N\}$ 是方差为 1 的高斯白噪声序列．第 i 个智能体的性能指标为

$$J_i^N(u_i,u_{-i}) \;=\; \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left(y_i(t)-\frac{1}{2}\overline{y}_N(t)\right)^2+u_i^2(t)\right],$$

由式 (6) 可知，这里辅助系统为

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^c(t) &=& G(\theta)y^c(t-1)-\dfrac{b^2}{1+b^2S(\theta)}b_\theta(t),\\ y^c(0) &=& y_0,\\ b_\theta(t) &=& G(\theta)b_\theta(t+1)-\dfrac{1}{2}y^c(t), \end{array}\right. \tag{24}$$

其中 $S(\theta)$ 由式 (4) 给出，$G(\theta)\;=\;a-\frac{ab^2S(\theta)}{1+b^2S(\theta)}$. 由式 (24) 可知 $y^c(t+1)+\varDelta y^c(t)+y^c(t-1)\;=\;0$. 其中 $\varDelta=\frac{b^2}{2G(\theta)(1+b^2S(\theta))}-G(\theta)-\frac{1}{G(\theta)}$, 则 $y^c(t)\;=\;y_0\lambda_1^t$ 为上述方程的一个解，其中 $\lambda_1=\frac{-\varDelta-\sqrt{\varDelta^2-4}}{2}$. 因此，分散控制律为

$$u_i^0(t) \;=\; -\frac{abS(\theta)}{1+b^2S(\theta)}y_i(t)-\frac{b}{1+b^2S(\theta)}b_i(t+1).$$

取 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $y_0=3$, $\sigma_{y_0}^2=7$, 则当系统个体数为 100 时，闭环系统的状态轨迹如图 1.

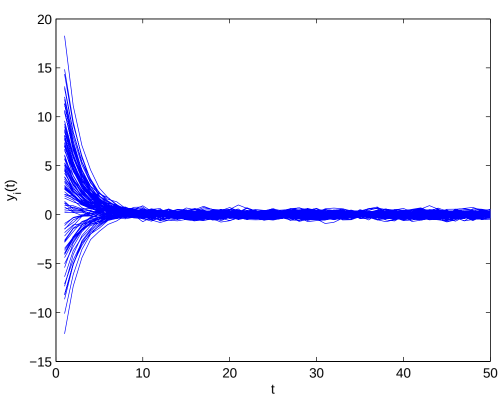

图 1 $N=100$ 时，智能体的状态轨迹

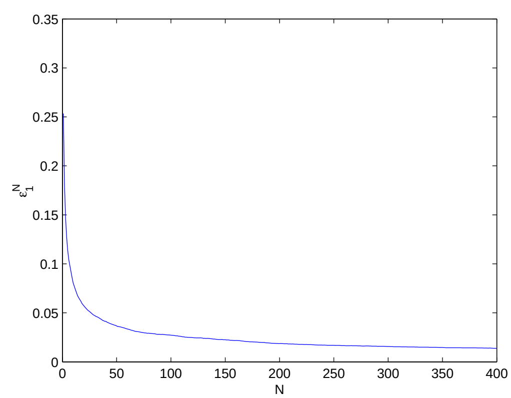

图 2 次优指标组和最优指标组间的偏差 ε_1^N

6　结论

本文研究了具有耦合二次型随机性能指标的离散时间 LPSMAS 的分散博弈问题．我们基于 NCE 设计了分散控制律，并利用概率极限理论分析了闭环系统的性质．证明了闭环系统的几乎必然一致稳定性，和对 PSA 估计在某种意义下的强一致性．最后证明了所设计的分散控制律是几乎必然渐近 Nash 均衡策略．对离散时间 LPSMAS 的分散博弈问题，本文仅进行了初步探索．有许多重要问题尚需进一步研究．例如，当分散控制律是几乎必然渐近最优时，次优性能指标关于个体数收敛到最优的速度是多少？当系统模型中含有未知参数时，如何设计最优分散控制律？等等．

附录

附录 A　引理 4.2 的证明

记

$$I_{1\theta}(t) \ = \ G^t(\theta)y_0, \quad I_{2\theta}(t) \ = \ \sum_{i=1}^{t} G^{t-i}(\theta)P(\theta)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} G^j(\theta)^{\mathrm{T}} Q\gamma y^*(i+j)\Big).$$

则式 (7) 可改写为 $Ey_\theta(t) = I_{1\theta}(t) + I_{2\theta}(t)$. 因此，为证此引理我们只需证明 $I_{1\theta}(t)$, $I_{2\theta}(t)$ 是一致有界等度连续的即可．由注 2(ii) 知，对任意的 $\theta \in \mathcal{M}$ 和 $t = 0, 1, \cdots$ 有

$$\begin{aligned} \|I_{1\theta}(t)\| \ &\leq \ \|G(\theta)\|^t\|y_0\| \ \leq \ M\lambda^t\|y_0\| \ \leq \ M\|y_0\|, \\ \|I_{2\theta}(t)\| \ &\leq \ \sum_{i=1}^{t}\|G(\theta)\|^{t-i}\|P(\theta)\|\Big\|\sum_{j=0}^{\infty} G^j(\theta)^{\mathrm{T}} Q\gamma y^*(i+j)\Big\| \leq \ \frac{M^2 M_P M_{y^*}\|Q\||\gamma|}{(1-\lambda)^2}. \end{aligned}$$

所以，$I_{1\theta}(t)$, $I_{2\theta}(t)$ 是一致有界的．下证 $I_{1\theta}(t)$, $I_{2\theta}(t)$ 的等度连续性．记 $Y_t \triangleq G^t(\theta_1) - G^t(\theta_2)$, 则 $Y_t \ = \ (G(\theta_1) - G(\theta_2))\, G^{t-1}(\theta_1) + G(\theta_2)Y_{t-1} \ = \ \sum\limits_{i=0}^{t-1} G^{t-i-1}(\theta_2)\,(G(\theta_1) - G(\theta_2))\, G^i(\theta_1)$. 因此，由注 2(ii) 知

$$\|Y_t\| \ \leq \ \|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|\sum_{i=0}^{t-1}\|G(\theta_2)\|^{t-i-1}\|G(\theta_1)\|^i \ \leq \ t\lambda^{t-1}\|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|, \tag{A.1}$$

注意到 $\psi \overset{\triangle}{=} \sup\limits_{t\geq 0}\lim\limits_{t\to\infty} t\lambda^{t-1} < \infty$, 由上式即得 $\|Y_t\| \ \leq \ \psi\|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|$, $t = 0, 1, \cdots$. 因此，对任意的 θ_1, $\theta_2 \in \mathcal{M}$, 有 $\sup\limits_{t\geq 0}\|I_{1\theta_1}(t) - I_{1\theta_2}(t)\| \leq \psi\|y_0\|\|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|$, 从而，由 $G(\theta)$ 在 $\mathcal{M}$ 上的一致连续性知 $I_{1\theta}(t)$ 是等度连续的．记

$$\begin{aligned} I_{21}(\theta_1, \theta_2, t) \ \triangleq \ &\Big\|\sum_{i=1}^{t} G^{t-i}(\theta_1)P(\theta_1)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} G^j(\theta_1)^{\mathrm{T}} Q\gamma y^*(i+j)\Big) \\ &- \sum_{i=1}^{t} G^{t-i}(\theta_2)P(\theta_2)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} G^j(\theta_1)^{\mathrm{T}} Q\gamma y^*(i+j)\Big)\Big\|, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{22}(\theta_1,\theta_2,t) \triangleq & \Big\| \sum_{i=1}^{t} G^{t-i}(\theta_2)P(\theta_2)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} G^j(\theta_1)^{\mathrm{T}} Q\gamma y^*(i+j)\Big) \\
& - \sum_{i=1}^{t} G^{t-i}(\theta_2)P(\theta_2)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} G^j(\theta_2)^{\mathrm{T}} Q\gamma y^*(i+j)\Big)\Big\|,
\end{aligned}
$$

则 $\|I_{2\theta_1}(t)-I_{2\theta_2}(t)\| \le I_{21}(\theta_1,\theta_2,t)+I_{22}(\theta_1,\theta_2,t)$. 由式 (A.1) 可得

$$
\begin{aligned}
& \|I_{21}(\theta_1,\theta_2,t)\| \\
\le & \frac{M^2\|Q\||\gamma|M_{y^*}}{(1-\lambda)^2}\|P(\theta_1)-P(\theta_2)\| + \frac{M\|Q\||\gamma|M_{y^*}M_P}{1-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\|G^i(\theta_1)-G^i(\theta_2)\| \\
\le & \frac{M^2\|Q\||\gamma|M_{y^*}}{(1-\lambda)^2}\|P(\theta_1)-P(\theta_2)\| + \frac{M\|Q\||\gamma|M_{y^*}M_P}{1-\lambda}\|G(\theta_1)-G(\theta_2)\|\sum_{i=1}^{\infty} i\lambda^{i-1} \\
\le & \frac{M^2\|Q\||\gamma|M_{y^*}}{(1-\lambda)^2}\|P(\theta_1)-P(\theta_2)\| + \frac{M\|Q\||\gamma|M_{y^*}M_P}{(1-\lambda)^3}\|G(\theta_1)-G(\theta_2)\|.
\end{aligned}
$$

同理可得 $\|I_{22}(\theta_1,\theta_2,t)\| \le \frac{M\|Q\||\gamma|M_{y^*}M_P}{(1-\lambda)^3}\|G(\theta_1)-G(\theta_2)\|$. 所以，存在与 t, θ_1, θ_2 无关的常数 K, 使得 $\|I_{2\theta_1}(t)-I_{2\theta_2}(t)\| \le K(\|G(\theta_1)-G(\theta_2)\|+\|P(\theta_1)-P(\theta_2)\|)$. 由此及 $G(\theta)$, $P(\theta)$ 在 $\mathcal{M}$ 上的一致连续性知 $I_{2\theta}(t)$ 是等度连续的.

附录 B 引理 4.3 的证明

由式 (12) 可知闭环系统的解满足

$$
y_i^0(t)-Ey_i^0(t) = G_i^t(y_i(0)-y_0)+\sum_{j=1}^{t} G_i^{t-j}Cw_i(j). \tag{B.1}
$$

记

$$
\begin{aligned}
\Pi_1^N & \triangleq \limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_i^t\big(y_i(0)-y_0\big)\Big\|^2, \\
\Pi_2^N & \triangleq \limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{t} G_i^{t-j}Cw_i(j)\Big)\Big\|^2,
\end{aligned}
$$

则

$$
\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\big\|\overline{y}_N^0(t)-E\overline{y}_N^0(t)\big\|^2 \le \Pi_1^N+\Pi_2^N, \quad a.s. \tag{B.2}
$$

由假设 (H_4) 及鞅差加权和估计定理 (文献 [11] 中定理 2.8) 得

$$
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\big(\|y_i(0)-Ey_i(0)\|^2 - E\|y_i(0)-Ey_i(0)\|^2\big) = 0, \quad a.s. \tag{B.3}
$$

由假设 (H_4) 知

$$
\sup_{N\ge 1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\|y_i(0)-Ey_i(0)\|^2 \le E\|y_1(0)-y_0\|^2 < \infty. \tag{B.4}
$$

因此，由式 (B.3) 和式 (B.4) 知存在 $M_E > 0$,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|y_i(0)-Ey_i(0)\|^2 \ \le\ M_E,\quad a.s. \tag{B.5}$$

进而，由注 2(ii) 和柯西不等式知

$$\begin{aligned}\varPi_1^N \ &\le\ \limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|G_i\|^{2t}\Big)\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|y_i(0)-y_0\|^2\Big)\\ &\le\ MM_E\limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\lambda^{2t} \ =\ 0,\quad a.s.\end{aligned} \tag{B.6}$$

记

$$\begin{aligned}\varPi_{21}^N \ &\triangleq\ \limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big[\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\Big\|\sum_{j=1}^{t}G_i^{t-j}Cw_i(j))\Big\|^2\Big],\\ \varPi_{22}^N \ &\triangleq\ \limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big[\frac{1}{N^2}\sum_{1\le i_1\ne i_2\le N}\Big(\sum_{j=1}^{t}G_{i_1}^{t-j}Cw_{i_1}(j)\Big)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{t}G_{i_2}^{t-j}Cw_{i_2}(j)\Big)\Big],\end{aligned}$$

则

$$\varPi_2^N \ =\ \varPi_{21}^N+\varPi_{22}^N,\quad a.s. \tag{B.7}$$

由柯西不等式，假设 (H_5) 和注 2 知

$$\begin{aligned}\varPi_{21}^N \le\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big[\frac{\|C\|^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{t}\|G_i\|^{t-j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{t}\|G_i\|^{t-j}\|w_i(j)\|^2\Big)\Big]\\ \le\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big[\frac{M^2\|C\|^2}{N^2(1-\lambda)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{t}\lambda^{t-j}\|w_i(j)\|^2\Big]\\ \le\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{2M^2\|C\|^2}{nN^2(1-\lambda)}\sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{1}{1-\lambda}\sum_{j=1}^{n}\|w_i(j)\|^2\Big]\\ \le\ &\frac{2M^2\|C\|^2\mathrm{tr}(R_\omega)}{N(1-\lambda)^2},\quad a.s.\end{aligned} \tag{B.8}$$

下面证明 $\varPi_{22}^N = 0,\ a.s.$ 首先，类似于文 [10] 中 (19) 式的证明可得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}w_i(t)w_j^{\mathrm{T}}(t) \ =\ 0,\quad i\ne j,\quad a.s. \tag{B.9}$$

令 $\mathcal{W}(t) \triangleq \big(w_1^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}\cdots w_N^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{F}_t \triangleq \sigma\Big(\bigcup_{i=1}^{N}\mathcal{F}_t^i\Big)$. 则由假设 ($\mathrm{H}_5$) 可知 $\{\mathcal{W}(t),\mathcal{F}_t\}$ 为鞅差列，满足

$$\sup_{t\ge 0}E\left[\|\mathcal{W}(t)\|^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] \ <\infty,\quad a.s. \tag{B.10}$$

并且由式 (B.9) 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathcal{W}(t)\mathcal{W}^{\mathrm{T}}(t) = \mathrm{diag}\left(CR_1C^{\mathrm{T}}\cdots CR_NC^{\mathrm{T}}\right) \triangleq R_C. \tag{B.11}$$

由假设 (H_5) 知 R_C 为非负定矩阵. 令

$$Y(t) = \left(\left(\sum_{j=1}^{t}G_1^{t-j}C\omega_1(j)\right)^{\mathrm{T}}\cdots\left(\sum_{j=1}^{t}G_N^{t-j}C\omega_N(j)\right)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{B.12}$$

则 $Y(t)$ 为随机差分方程

$$Y(t+1) = G^*Y(t)+\mathcal{W}(t+1)$$

的解, 其中 $G^* \triangleq \mathrm{diag}\,(G_1\ G_2\cdots G_N)$. 由 $G_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为稳定矩阵知 G^* 为稳定矩阵. 从而由式 (B.10), 式 (B.11) 及文献 [10] 中引理 4.1 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Y(t)Y^{\mathrm{T}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(G^*)^kR_C(G^*)^{k^{\mathrm{T}}}. \tag{B.13}$$

注意到式 (B.12) 及 G^* 和 R_C 为对角阵可得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{t}G_{i_1}^{t-j}Cw_{i_1}(j)\right)\left(\sum_{j=1}^{t}G_{i_2}^{t-j}Cw_{i_2}(j)\right)^{\mathrm{T}} = 0, \quad 1\le i_1\ne i_2\le N, \quad a.s.$$

即 $\varPi_{22}^N = 0$, $a.s.$ 因此, 由式 (B.7) 和式 (B.8) 知 $\varPi_2^N \le \frac{2M^2\|C\|^2\mathrm{tr}(R_\omega)}{N(1-\lambda)^2}$, $a.s.$ 进而由式 (B.2) 和 (B.6) 知引理 4.3 结论成立.

附录 C　定理 4.3 及其相关引理的证明

记

$$J_i^N\left(u_i^0,u_{-i}^0\right) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left(y_i^0(t)-\gamma\overline{y}_N^0(t)\right)^{\mathrm{T}}Q\left(y_i^0(t)-\gamma\overline{y}_N^0(t)\right)+(u_i^0)^{\mathrm{T}}Ru_i^0\right],$$

$$J_i^N\left(u_i^0,\gamma y^*\right) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left(y_i^0(t)-\gamma y^*\right)^{\mathrm{T}}Q\left(y_i^0(t)-\gamma y^*\right)+(u_i^0)^{\mathrm{T}}Ru_i^0\right],$$

$$J_i^N\left(u_i,u_{-i}^0\right) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left(y_i(t)|_{u_i}-\gamma\overline{y}_N(t)|_{u_i,u_{-i}^0}\right)^{\mathrm{T}}Q\left(y_i(t)|_{u_i}-\gamma\overline{y}_N(t)|_{u_i,u_{-i}^0}\right)+u_i^{\mathrm{T}}Ru_i\right],$$

其中 $y_i(t)|_{u_i}$ 表示将任意的 $u_i\in\mathcal{U}_{g,i}$ 代入系统 (1) 所得到的闭环解.

引理 C.1　对于系统 (1) 和指标 (3), 若假设 (H_1), (H_3) – (H_6) 成立, 则存在非负随机变量 $C_1<\infty$, 使得

$$\sup_{N\ge1}\max_{1\le i\le N}J_i^N\left(u_i^0,u_{-i}^0\right)\le C_1, \quad a.s. \tag{C.1}$$

证　记

$$C_0 = \sup_{N\ge1}\max_{1\le i\le N}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left\|y_i^0(t)\right\|^2+\left\|u_i^0(t)\right\|^2\right]. \tag{C.2}$$

则由 $J_i^N\left(u_i^0,u_{-i}^0\right)$ 的定义式可知

$$\begin{aligned}J_i^N\left(u_i^0,u_{-i}^0\right) &\le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\|Q\|\|y_i^0(t)-\gamma\overline{y}_N^0(t)\|^2+\|R\|\|u_i^0(t)\|^2\right)\\ &\le (2\|Q\|+\|R\|+2\|Q\||\gamma|^2)C_0 \triangleq C_1.\end{aligned}$$

由定理 4.1 知 C_1 与 i, N 无关，因此引理 C.1 成立.

引理 C.2 对于系统 (1) 和指标 (3), 若假设 (H_1), $(\mathrm{H}_3)-(\mathrm{H}_6)$ 成立，则存在非负随机变量 $C_2<\infty$, 使得

$$\sup_{N\ge1}\max_{1\le i\le N}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left(\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\ne i}^{N}y_j^0(t)\right)^{\mathrm{T}}Q\left(\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\ne i}^{N}y_j^0(t)\right)\right]\le C_2,\quad a.s. \tag{C.3}$$

证　由式 (C.2) 可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left(\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\ne i}^{N}y_j^0(t)\right)^{\mathrm{T}}Q\left(\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\ne i}^{N}y_j^0(t)\right)\right]\\ \le\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\|Q\|\left\|\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\ne i}^{N}y_j^0(t)\right\|^2\right]\le \|Q\||\gamma|^2C_0\triangleq C_2,\quad a.s.\end{aligned}$$

引理 C.2 证毕.

引理 C.3 对于系统 (1) 和指标 (3), 若假设 (H_1), $(\mathrm{H}_3)-(\mathrm{H}_6)$ 成立，则 $J_i^N\left(u_i^0,u_{-i}^0\right)\le J_i^N\left(u_i^0,\gamma y^*\right)+O\left(\varepsilon_1^N\right)$, $a.s.$ 其中

$$\varepsilon_1^N=\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\|y^*(t)-\overline{y}_N^0(t)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{C.4}$$

证　由定理 4.1 和定理 4.2 及柯西不等式得

$$\begin{aligned}&J_i^N(u_i^0,u_{-i}^0)\\ =&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[(y_i^0(t)-\gamma y^*+\gamma y^*-\gamma\overline{y}_N^0(t))^{\mathrm{T}}Q(y_i^0(t)-\gamma y^*+\gamma y^*-\gamma\overline{y}_N^0(t))+(u_i^0)^{\mathrm{T}}Ru_i^0\right]\\ \le&J_i^N\left(u_i^0,\gamma y^*\right)+\|Q\||\gamma|^2\left(\varepsilon_1^N\right)^2+2\sqrt{2}\|Q\||\gamma|\varepsilon_1^N\left[\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}(\|y_i^0(t)\|^2+\gamma^2\|y^*\|^2)\right]^{\frac{1}{2}}\\ =&J_i^N(u_i^0,\gamma y^*)+O(\varepsilon_1^N),\quad a.s.\end{aligned}$$

引理 C.3 证毕.

引理 C.4 对于系统 (1) 和指标 (3), 若假设 (H_1), $(\mathrm{H}_3)-(\mathrm{H}_6)$ 成立，则

$$J_i^N\left(u_i^0,\gamma y^*\right)\le\inf_{u_i\in\mathcal{U}_{g,i}}J_i^N\left(u_i,u_{-i}^0\right)+O\left(\varepsilon_1^N\right)+O\left(\frac{1}{N}\right),\quad a.s. \tag{C.5}$$

其中 ε_1^N 由式 (C.4) 给出.

证 由引理 C.1 和引理 C.2 知，存在随机变量 $C_1<\infty$ 和 $C_2<\infty$ 使得式 (C.1) 和 (C.3) 成立. 记

$$\begin{aligned}\varXi^0=\Big\{\omega:&\sup_{N\geq 1}\max_{1\leq i\leq N}J_i^N(u_i^0,u_{-i}^0)\leq C_1,\\&\sup_{N\geq 1}\max_{1\leq i\leq N}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big[\Big(\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}y_j^0(t)\Big)^{\mathrm T}Q\Big(\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}y_j^0(t)\Big)\Big]\leq C_2\Big\},\end{aligned}$$

则 $P\left(\varXi^0\right)=1$. 对于任意的 $\omega\in\varXi^0$, 由于 $u_i^0\in\mathcal{U}_{l,i}\subseteq\mathcal{U}_{g,i}$, 所以 $\inf\limits_{u_i\in\mathcal{U}_{g,i}}J_i^N\left(u_i,u_{-i}^0\right)\leq J_i^N\left(u_i^0,u_{-i}^0\right)$, 故我们只考虑 $\mathcal{U}_{g,i}$ 中满足如下条件的 u_i

$$J_i^N\left(u_i,u_{-i}^0\right)\ \leq\ J_i^N\left(u_i^0,u_{-i}^0\right). \tag{C.6}$$

由引理 C.1, 式 (C.1) 和式 (C.6) 得

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big[\big(I_n-\frac{\gamma}{N}\big)y_i(t)|_{u_i}-\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}y_j^0(t)\Big]^{\mathrm T}Q\Big[\big(I_n-\frac{\gamma}{N}\big)y_i(t)|_{u_i}-\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}y_j^0(t)\Big]\\=&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\big(y_i(t)|_{u_i}-\gamma\overline{y}_N(t)|_{u_i,u_{-i}^0}\big)^{\mathrm T}Q\big(y_i(t)|_{u_i}-\gamma\overline{y}_N(t)|_{u_i,u_{-i}^0}\big)\\\leq&J_i^N\big(u_i,u_{-i}^0\big)\ \leq\ J_i^N\big(u_i^0,u_{-i}^0\big)\ \leq\ C_1.\end{aligned}\tag{C.7}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\Big[\Big(I_n-\frac{\gamma}{N}\Big)y_i(t)|_{u_i}\Big]^{\mathrm T}Q\Big[\Big(I_n-\frac{\gamma}{N}\Big)y_i(t)|_{u_i}\Big]\\\leq&\ 2\Big[\Big(I_n-\frac{\gamma}{N}\Big)y_i(t)|_{u_i}-\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}y_j^0(t)\Big]^{\mathrm T}Q\Big[\Big(I_n-\frac{\gamma}{N}\Big)y_i(t)|_{u_i}-\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}y_j^0(t)\Big]\\&+2\Big(\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}y_j^0(t)\Big)^{\mathrm T}Q\Big(\frac{\gamma}{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}y_j^0(t)\Big),\end{aligned}$$

则由式 (C.7) 及引理 C.2 知

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big[\Big(I_n-\frac{\gamma}{N}\Big)y_i(t)|_{u_i}\Big]^{\mathrm T}Q\Big[\Big(I_n-\frac{\gamma}{N}\Big)y_i(t)|_{u_i}\Big]\ \leq\ 2C_1+2C_2\ \triangleq\ C_3. \tag{C.8}$$

再注意到

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big[\Big(I_n-\frac{\gamma}{N}\Big)y_i(t)|_{u_i}\Big]^{\mathrm T}Q\Big[\Big(I_n-\frac{\gamma}{N}\Big)y_i(t)|_{u_i}\Big]\\\geq&\ \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(y_i(t)|_{u_i}\right)^{\mathrm T}Q\left(y_i(t)|_{u_i}\right)+\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\Big[-\frac{2\gamma}{N}\left(y_i(t)|_{u_i}\right)^{\mathrm T}Q\left(y_i(t)|_{u_i}\right)\Big]\\=&\ \Big(1-\frac{2\gamma}{N}\Big)\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(y_i(t)|_{u_i}\right)^{\mathrm T}Q\left(y_i(t)|_{u_i}\right),\end{aligned}$$

在上式中令 $N\to\infty$, 结合式 (C.8) 可得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(y_i(t)|_{u_i}\right)^{\mathrm{T}}Q\left(y_i(t)|_{u_i}\right)\ \le\ C_3. \tag{C.9}$$

由 $J_i^N\left(u_i,u_{-i}^0\right)$ 的定义式可知

$$J_i^N\left(u_i,u_{-i}^0\right)\ge J_i^N\left(u_i^0,\gamma y^*\right)+\Sigma_1^N+\Sigma_2^N, \tag{C.10}$$

其中

$$\begin{aligned}\Sigma_1^N\ &=\ \liminf_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left(y_i(t)|_{u_i}-\gamma y^*\right)^{\mathrm{T}}Q\left(\gamma y^*-\gamma\overline{y}_N^0(t)\right)\right],\\ \Sigma_2^N\ &=\ \liminf_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[\left(y_i(t)|_{u_i}-\gamma y^*\right)^{\mathrm{T}}Q\left(\frac{\gamma}{N}y_i^0(t)-\frac{\gamma}{N}y_i(t)|_{u_i}\right)\right].\end{aligned}$$

由式 (C.9) 和柯西不等式可得

$$\begin{aligned}&|\Sigma_1^N|\\ &\le\limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\{\left[(y_i(t)|_{u_i}-\gamma y^*)^{\mathrm{T}}Q(y_i(t)|_{u_i}-\gamma y^*)\right]^{\frac{1}{2}}\left[(\gamma y^*-\gamma\overline{y}_N^0(t))^{\mathrm{T}}Q(\gamma y^*-\gamma\overline{y}_N^0(t))\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\\ &\le 2|\gamma|\sqrt{\|Q\|}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left[(y_i(t)|_{u_i})^{\mathrm{T}}Q(y_i(t)|_{u_i})+(\gamma y^*)^{\mathrm{T}}Q(\gamma y^*)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\qquad\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\|y^*-\overline{y}_N^0(t)\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\le 2|\gamma|\sqrt{\|Q\|}\left(2C_3+2\|Q\||\gamma|^2M_{y^*}^2\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1^N=O\left(\varepsilon_1^N\right).\end{aligned}$$

同理可得 $|\Sigma_2^N|=O\left(\frac{1}{N}\right)$. 进而由式 (C.10) 得 $J_i^N\left(u_i^0,\gamma y^*\right)\le J_i^N\left(u_i,u_{-i}^0\right)+O\left(\varepsilon_1^N\right)+O\left(\frac{1}{N}\right)$, *a.s.* 故式 (C.5) 成立. 引理 C.4 证毕.

定理 4.3 的证明　由引理 C.3 和引理 C.4 得

$$J_i^N\left(u_i^0,u_{-i}^0\right)\ \le\ \inf_{u_i\in\mathcal{U}_{g,i}}J_i^N\left(u_i,u_{-i}^0\right)+O\left(\varepsilon_1^N\right)+O\left(\frac{1}{N}\right),\quad a.s.$$

由式 (C.4) 和定理 4.2 知 $\varepsilon_1^N\xrightarrow[N\to\infty]{a.s.}0$. 因此，由定义 2.1 知定理 4.3 成立.

参　考　文　献

[1] Adam J and Seth H. Congestion control, differential services and efficient capacity management through a novel pricing strategy. *Computer Communications*, 2003, **26**: 1457–1469.

[2] Shi H and Wang L. Swarming behavior of multi-agent systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 2004, **2**: 313–318.

[3] Erickson G M. Differential game models of advertising competition. *Europe Journal of Operational Research*, 1995, **83**: 431–438.

[4] Altman E and Boulogne T. A survery on networking games in telecommunications. *Computers and Operations Research*, 2006, **2**: 286–311.
[5] Dudenhoeffer D A. Formation behavior for large-scale micro-robot force deployment. Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference, 2000, 972-983.
[6] Liu Z and Guo L. Connectivity and sychronization of multi-agent systems. Proceedings of the 25th Chinese Control Conference, Harbin, China, 379–382.
[7] Huang M, Caines P E and Malhame R P. Individual and mass behavior in large population stochastic wireless power control problems centralized and Nash equilibrium solutions. Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, 2004, 98–103.
[8] Huang M, Caines P E and Malhame R P. Large-population cost-couple LQG problems: generalizations to non-uniform individuals. Proceedings of 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Nassau, Bahamas, 2004, 3453–3458.
[9] Li T and Zhang J F. Asmptotically optimal decentralized control for large population stochastic multi-agent systems. Submited to IEEE Transaction on Automatic Control, 2006.
[10] Li T and Zhang J F. Decentralized tracking-type games for multi-agent systems with coupled ARX models: Asymptotic Nash equilibria. Provisionally Accepted by Automatica, 2007.
[11] Chen H F and Guo L. Identification and stochastic adaptive control. Boston, MA: Birkhäuser, 1991.
[12] Huang M, Caines P E and Malhame R P. Uplink power adjustment in wireless communication systems: A stochastic control analysis. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2004, **49**(10), 1693–1708.
[13] Huang M, Malhame R P and Caines P E. Nash certainty equivalence in large population stochastic dynamic games: Connections with the physics of interacting particle systems. Proceedings of the 45th IEEE Conference of Decision and Control, San Diego, 2006, 4921–4926.

LINEAR QUADRATIC DECENTRALIZED DYNAMIC GAMES FOR LARGE POPULATION DISCRETE-TIME STOCHASTIC MULTI-AGENT SYSTEMS

Ma Cuiqin Li Tao Zhang Jifeng

(*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract In this paper, decentralized games of discrete-time large population stochastic multi-agent systems are considered under a coupled quadratic performance index. Based on the state aggregation method, the estimate of the population state average is constructed, with which and the Nash certainty equivalence principle, the decentralized control law is designed. By the probability limit theory, the stability and optimality of closed-loop system is analyzed. The main results are: (1) The estimate of the PSA is shown to be strongly consistent in some norm sense, which implies that the estimation error is convergent to zero almost surely as the number of agents increases to infinity. (2) The closed-loop system is almost surely uniformly stable, in other words, the stability is independent of the number of system agents. (3) The decentralized control law is an almost surely asymptotic Nash equilibrium strategy.

Key words Multi-agent systems, decentralized control, asymptotic Nash equilibrium, discrete time system, stochastic dynamic game.